RR-0879/200

RR-0879

Third Year B. Sc. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - VIII

(Numerical Analysis)

(Old Course)

Time : Hours] [Total Marks : **70**

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :

☛ **F. Y. B. Sc.**

Name of the Subject :

☛ **Mathematics - 8**

☛ Subject Code No. : **0 8 7 9** ☛ Section No. (1, 2,.....) : **Nil**

Seat No. :

Student's Signature

(૨) જમણી બાજુના અંક તે પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

(૩) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

(૪) "Scientific Non-Programmable Calculator'નો જ ઉપયોગ કરવો.

૧ માંગ્યા મુજબ જવાબ આપો : ૧૦

(૧) નીચેની સંખ્યાઓને બે દશાંશ સ્થળ સુધી સરખી કરો :

(i) 48.21416

(ii) 71.375

(૨) નીચેની સંખ્યાઓને ચાર સાર્થક અંક સુધી સરખી કરો :

(i) 0.70029

(ii) 19.275202

(૩) નિરપેક્ષ ત્રુટિની વ્યાખ્યા આપો.

(૪) ટકાવારી ત્રુટિની વ્યાખ્યા આપો.

(૫) સાબિત કરો કે : $\Delta \equiv \delta E^{1/2}$.

(૬) સાબિત કરો કે : $\nabla \equiv E^{-1}\Delta$.

(૭) સાબિત કરો : $\Delta^3_{y_k} = \delta^3 y_{k+3/2}$.

(૮) જો $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ હોય, તો વિભાજીત અંતર $[a, b]$ની કિંમત શોધો.

(૯) સંખ્યાત્મક સંકલન એટલે શું ?

(૧૦) ઓઈલરની પદ્ધતિના બે ગેરફાયદા જણાવો.

૨ (અ) સમીકરણ $f(x)=0$ ના બીજને મેળવવા માટેની 'ક્રમિકોની પદ્ધતિ' સમજાવો. તેનું ભૌમિતીક અર્થઘટન આપો. ૪

(બ) બે સંખ્યાઓના ગુણાકાર $x \cdot y$માં નિરપેક્ષ ત્રુટિ શોધો; જ્યાં $x=3.5$ તથા $y=21.273$; બંને સંખ્યાઓ આપેલ સાર્થક અંકો માટે સાચી છે. ૪

(ક) સમીકરણ $f(x)=x^3-x-1=0$ ના બીજને 'દુભાજક પદ્ધતિ'થી શોધો. ૪

અથવા

૨ (અ) સમીકરણ $f(x)=0$ ના બીજને મેળવવા માટેનું 'ન્યૂટન-રાફ્સન સૂત્ર' મેળવો. ૪

(બ) (૧) જો 8.6 તેના બંને અંકોમા સાચી હોય તો સાપેક્ષ ત્રુટિ શોધો. ૪

(૨) જો π ની અંદાજીત કિંમત $X_1=3.1428571$ આપવામાં આવી હોય અને તેની સાચી કિંમત $X=3.1415926$ છે, તો સાપેક્ષ ત્રુટિ શોધો.

(ક) સમીકરણ $f(x)=x^3+x-1=0$ ના બીજને 'ક્રમિકોની પદ્ધતિ'થી શોધો. ૪

૩ (અ) 'ન્યૂટનનું પ્રગતાન્તર અંતર્વેશન સૂત્ર મેળવો. ૪

(બ) આપેલો કોષ્ટક પરથી $f(3.5)$ શોધો : ૪

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$y=f(x)$	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918

(ક) સાબિત કરો કે : ૪

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_{n-1}={}^nC_1\,u_0+{}^nC_2\,\Delta u_0+\ldots\ldots+\Delta^{n-1}u_0$$

અથવા

૩ (અ) 'ગૌસનું પૃષ્ઠાંતર અંતર્વેશનસૂત્ર મેળવો. ૪

(બ) 'ગૌસના પ્રગતાન્તર અંતર્વેશન સૂત્ર'નો ઉપયોગ કરી, નીચેના કોષ્ટક પરથી $f(1966)$ શોધો : ૪

x	1931	1941	1951	1961	1971	1981
$y=f(x)$	12	15	20	27	39	52

(ક) સાબિત કરો કે : $1+\delta^2\mu^2 \equiv \left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^2$. ૪

૪ (અ) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે : ૪

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_n} = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y_n + \ldots\ldots\right]$$

(બ) નીચે આપેલા કોષ્ટક પરથી $x=2.0$ આગળ $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો : ૪

x	1.4	1.6	1.8	2.0
$y=f(x)$	5.056	5.953	7.050	8.389

(ક) 'લાગ્રાન્જના અંતર્વેશન સૂત્રનો ઉપયોગ કરી નીચેના કોષ્ટક પરથી $f(2)$ની કિંમત શોધો : ૪

x	0	1	3
$y=f(x)$	1	0	10

અથવા

૪ (અ) 'ન્યૂટનનું વિભાજીત-અંતર અંતર્વેશન સૂત્ર' મેળવો. ૪

(બ) 'ન્યૂટનના વિભાજીત-અંતર અંતર્વેશન સૂત્ર'નો ઉપયોગ કરી, કોષ્ટકની કિંમતોનું સમાધાન કરતી બહુપદી $f(x)$ શોધો :

x	−1	1	2	3
$y=f(x)$	−21	15	12	3

(ક) સાબિત કરો કે વિભાજીત અંતરો તેના નિરપેક્ષ ચલને સાપેક્ષ સંમિત છે. ૪

૫ (અ) 'સિમ્પસનનો - $\frac{1}{3}$ - નિયમ લખો અને સાબિત કરો. ૪

(બ) 'સમલંબકના નિયમ'નો ઉપયોગ કરી $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ની કિંમત મેળવો. ૪

(ક) અંતરાલ $[1,7]$ના 6 સરખા ભાગ કરી, 'સિમ્પસનના - $\frac{3}{8}$ - નિયમ'નો ઉપયોગ કરી $I=\int_1^7 \frac{dx}{1+x}$ની કિંમત મેળવો. ૪

અથવા

૫ (અ) 'સિમ્પસનનો - $\frac{3}{8}$ - નિયમ' લખો અને સાબિત કરો. ૪

(બ) અંતરાલ $[0,1]$ના 4 સરખા ભાગ કરી, 'સમલંબકના નિયમ'નો ૪

ઉપયોગ કરી, $I=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx$ની કિંમત મેળવો.

(ક) અંતરાલ $[1,4]$ના 6 સરખા ભાગ કરી, 'સિમ્પસનના - $\frac{1}{3}$ - નિયમ'નો ૪

ઉપયોગ કરી $I=\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$ની કિંમત મેળવો.

૬ (અ) પ્રારંભિક મૂલ્ય પ્રશ્ન : ૪

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$; $y(x_0)=y_0$ને ઉકેલવા માટેની 'ઓઈલરની પદ્ધતિ' સમજાવો.

(બ) પ્રારંભિક મૂલ્ય પ્રશ્ન : $\frac{dy}{dx}=x-y^2$; $y(0)=1$નો ઉકેલ. ૪

'ટેલરની શ્રેઢી પદ્ધતિ'થી મેળવો.

(ક) પ્રારંભિક મૂલ્ય પ્રશ્ન : ૪

$\frac{dy}{dx}=1-y$; $y(0)=0$ માટે, 'ઓઈલરની સંશોધિત પદ્ધતિ'થી $h=0.1$ લઈ, $y(0.1)$ની કિંમત શોધો.

અથવા

૬ (અ) 'પ્રારંભિક મૂલ્ય પ્રશ્ન $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$; $y(x_0)=y_0$ને ઉકેલવા માટેની ૪

'ઓઈલરની સંશોધિત પદ્ધતિ' સમજાવો.

(બ) 'પ્રારંભિક મૂલ્ય પ્રશ્ન $\frac{dy}{dx}=-2y$; $y(0)=1$નો ઉકેલ $h=0.1$ લઈ, ૪

'ઓઈલરની પદ્ધતિ'થી $y(0.4)$ની કિંમત શોધો.

(ક) પ્રારંભિક મૂલ્ય પ્રશ્ન ૪

$\frac{dy}{dx}=y-x$; $y(0)=2$નો ઉકેલ $h=0.1$ લઈ $y(0.1)$ની કિંમત, 'રંગે-કુત્તાની દ્વિતિય કક્ષા પદ્ધતિ'થી શોધો.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) As per the instruction No. **1** of page no. **1**.

(2) Figures to the **right** indicate marks of the question.

(3) Follow usual notations.

(4) Use of "Scientific Non-Programmable calculator" is allowed.

1 Answer as directed : **10**

(1) Round-off the following numbers to two decimal places :

(i) 48.21416

(ii) 71.375.

(2) Round-off the following numbers to four significant digits :

(i) 0.70029

(ii) 19.275202.

(3) Define Absolute Error.

(4) Define Percentage Error.

(5) Prove that $\Delta \equiv \delta E^{1/2}$.

(6) Prove that $\nabla \equiv E^{-1}\Delta$.

(7) Prove that : $\Delta^3_{y_k} = \delta^3 y_{k+3/2}$.

(8) If $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, then find the value of the divided difference $[a,b]$.

(9) What is numerical integration ?

(10) State two disadvantages of 'Euler's method.

2 (a) Explain 'the Iteration Method' to obtain a root of the equation $f(x)=0$. Give the geometrical interpretation of it. **4**

(b) Find the relative error in the product $x \cdot y$ where $x = 3.5$ and $y = 21.273$; where both *x, y* are correct to the significant digits. **4**

(c) Find a root of the equation $f(x)=x^3-x-1=0$, by 'the Bisection Method. 4

OR

2 (a) Derive 'the Newton-Raphson formula' to obtain a root of the equation $f(x)=0$. 4

(b) (1) If 8.6 is correct in both of its digits, then find the relative error. 4

(2) If an approximate value of π is given by $X_1=3.1428571$ and its true value if $X=3.1415926$, Find the relative error.

(c) Find a root of the equation $f(x)=x^3+x-1=0$, by 'the Iteration method. 4

3 (a) Derive 'Newton's Forward-Difference Interpolation formula. 4

(b) Using the following table; find $f(3.5)$. 4

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$y=f(x)$	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918

(c) Prove that : 4

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_{n-1}={}^nC_1\,u_0+{}^nC_2\,\Delta u_0+\ldots\ldots+\Delta^{n-1}u_0$$

OR

3 (a) Derive 'Gauss' Backward Difference Interpolation formula. 4

(b) Using 'Gauss' forward Difference Interpolation formula', find $f(1966)$ given that :

x	1931	1941	1951	1961	1971	1981
$y=f(x)$	12	15	20	27	39	52

(c) Prove that : $1+\delta^2\mu^2\equiv\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)^2$. 4

4 (a) Prove, in usual notations, that : 4

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_n}=\frac{1}{h}\left[\nabla y_n+\frac{1}{2}\nabla^2 y_n+\frac{1}{3}\nabla^3 y_n+\ldots\ldots\right]$$

(b) Using the following table, find $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $x = 2.0$. 4

x	1.4	1.6	1.8	2.0
$y = f(x)$	5.056	5.953	7.050	8.389

(c) Using 'Lagrange's Inter polation formula', find the value of $f(2)$ for the table : 4

x	0	1	3
$y = f(x)$	1	0	10

OR

4 (a) Derive 'Newton's Divided - Difference Interpolation Formula'. 4

(b) Using 'Newton's Divided-Difference Interpolation Formula, find a polynomial $f(x)$ statisfying tabular values 4

x	-1	1	2	3
$y = f(x)$	-21	15	12	3

(c) Prove that the divided-differences are symmetric in their arguments. 4

5 (a) State and Prove 'Simpson's - $\frac{1}{3}$ - Rule. 4

(b) Evaluate $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; by using 'Trapezoidal Rule'. 4

(c) Evaluate $I = \int_1^7 \frac{dx}{1+x}$; by using 'Simpson's - $\frac{3}{8}$ - Rule', by dividing the interval $[1, 7]$ into 6 equal parts. 4

OR

5 (a) State and prove 'Simpson's - $\frac{3}{8}$ - Rule'. 8

(b) Evaluate $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$; by using 'Trapezoidal Rule', 4

by dividing the interval $[0, 1]$ into 4 equal parts.

(c) Evaluate $I = \int_1^4 \frac{1}{x}\, dx$; by using 'Simpson's - $\frac{1}{3}$ - Rule', 4

by dividing the interval $[1, 4]$ into 6 equal parts.

6 (a) Explain 'Euler's Method' to solve the initial value 4

problem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$

(b) Using 'Taylor's series Method', solve the initial 4

value problem : $\frac{dy}{dx} = x - y^2$; $y(0) = 1$.

(c) Using Euler's modified method',

find $y(0.1)$ by taking $h = 0.1$, for the initial value problem :

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y \quad ; \quad y(0) = 0.$$

OR

6 (a) Explain 'Euler's modified method' to solve the 4

initial value problem : $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$.

(b) Using 'Euler's method', by taking $h = 0.1$, 4

find $y(0.4)$ for the initial value problem

$$\frac{dy}{dx} = -2y \ ; y(0) = 1$$

(b) Using 'Range-Kutta second order Method, find 4

$y(0.1)$ by taking $h = 0.1$, for the initial value problem.

$$\frac{dy}{dx} = y - x \,; y(0) = 2.$$